

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы
факультета

Декан физико-математического

_____/проф. И.А.Танкиев
«27» апреля 2026г.

_____/М.Х.Мальсагов от
от «28» апреля 2026г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ФТД 01 Избранные вопросы математического анализа

Направление подготовки

01.03.01 – МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас 2026

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины (модуля) «**Избранные вопросы математического анализа**» являются:

- углубленное изучение ключевых разделов математического анализа, выходящих за рамки базового курса, с акцентом на их теоретическую глубину и практическую значимость;
- развитие навыков исследования сложных математических объектов, строгих доказательств и применения аналитических методов к решению прикладных задач;
- подготовка будущего учителя математики к преподаванию математического анализа на углубленном уровне, к работе с одаренными детьми и к проведению научно-исследовательской деятельности;
- формирование компетенций, необходимых для использования методов современного анализа в профессиональной педагогической и научной деятельности.

Задачи изучения дисциплины:

- изучить углубленные вопросы теории функций действительного переменного, дифференциального и интегрального исчисления;
- сформировать навыки решения задач повышенной сложности, использования вариационного исчисления и специальных функций;
- развить умения применять методы функционального анализа, интегральных преобразований и теории меры к решению задач математической физики;
- подготовить к использованию полученных знаний в педагогической деятельности, научной работе и при изучении смежных дисциплин.

Для дисциплин, формирующих профессиональные компетенции:

Формируемые дисциплиной знания и умения готовят выпускника данной образовательной программы к выполнению следующих обобщенных трудовых функций (трудовых функций) в соответствии с Профессиональным стандартом «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)» (приказ Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18 октября 2013 г. № 544н, код профессионального стандарта – 01.001) и Профессиональным стандартом «Педагог-психолог (психолог в сфере образования)»:

Код	Наименование обобщенной трудовой функции / трудовой функции
А/01.6	Общепедагогическая функция. Обучение
А/03.6	Развивающая деятельность
В/03.6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования
В/04.6	Модуль «Предметное обучение. Математика»

2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина **Б1.В.ДВ.01.01 «Избранные вопросы математического анализа»** относится

к части, формируемой участниками образовательных отношений, дисциплинам по выбору Блока 1 «Дисциплины (модули)» ОПОП.

Логическая и содержательно-методическая взаимосвязь с другими элементами ОПОП:

Дисциплина опирается на знания, умения и навыки, полученные студентами при изучении следующих предшествующих дисциплин:

- «Математический анализ» (базовый курс);
- «Линейная алгебра»;
- «Дифференциальные уравнения»;
- «Теория функций действительной переменной»;
- «Функциональный анализ»;
- «Дифференциальные уравнения в частных производных».

Требования к «входным» знаниям, умениям и готовностям обучающегося:

Обучающийся должен:

- **Знать:** основные понятия математического анализа; теорию рядов и интегралов; методы решения дифференциальных уравнений; основы функционального анализа.
- **Уметь:** исследовать сходимость рядов и интегралов; дифференцировать и интегрировать функции; решать дифференциальные уравнения; работать с функциональными пространствами.
- **Владеть:** навыками строгих доказательств; методами аналитических преобразований; основами теории меры и интеграла.

Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

- «Уравнения математической физики»;
- «Численные методы»;
- «Методы математической физики»;
- «Подготовка к итоговой государственной аттестации» (выпускная квалификационная работа);
- «Научно-исследовательская работа».

3. Результаты освоения дисциплины (модуля)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)	В результате освоения дисциплины обучающийся должен:
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный	УК-1.1 – Анализирует сложные математические объекты, выделяя их	Знать: основные понятия и теоремы избранных разделов математического анализа.

	подход для решения поставленных задач	структуру.	
		УК-1.4 – Синтезирует различные методы анализа для выбора оптимального.	Уметь: применять методы функционального, гармонического и вариационного анализа.
		УК-1.5 – Критически оценивает полученные решения, проверяя их корректность.	Владеть: навыками строгих доказательств и критической оценки решений.
ПК-1	Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	ПК-1.1 – Демонстрирует знание углубленных разделов математического анализа.	Знать: теоретические основы избранных разделов анализа.
		ПК-1.2 – Применяет методы анализа для решения профессиональных педагогических и научных задач.	Уметь: решать задачи повышенной сложности по математическому анализу.
ПК-3	Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов	ПК-3.1 – Использует материал углубленного анализа для развития мышления учащихся.	Знать: методические возможности использования углубленного анализа в школе и на факультативах.
		ПК-3.2 – Разрабатывает задания с использованием методов математического анализа.	Уметь: составлять и адаптировать задачи повышенной сложности для учащихся.

			Владеть: методикой формирования математического мышления через решение нестандартных задач.
--	--	--	--

4. Структура и содержание дисциплины (модуля)

4.1. Структура дисциплины (модуля)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 часов.

№ п/п	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	Семестр	Всего	Лекции	Практика	СРС	Формы контроля
1	Раздел 1. Теория функций действительного переменного	8	20	6	6	8	Собеседование
	Тема 1.1. Мера Лебега и интеграл Лебега.	8	8	2	2	4	
	Тема 1.2. Метрические пространства и пространства функций.	8	6	2	2	2	
	Тема 1.3. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.	8	6	2	2	2	
2	Раздел 2. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах	8	18	6	6	6	Проверка контрольных работ
	Тема 2.1. Производная Фреше и Гато.	8	6	2	2	2	
	Тема 2.2. Теоремы о неявных и обратных функциях.	8	6	2	2	2	

	Тема 2.3. Экстремумы функций многих переменных.	8	6	2	2	2	
3	Раздел 3. Интегральные преобразования	8	20	6	8	6	Проверка контрольных работ
	Тема 3.1. Преобразование Лапласа: определение и свойства.	8	6	2	2	2	
	Тема 3.2. Преобразование Фурье и его обобщения.	8	6	2	2	2	
	Тема 3.3. Применение интегральных преобразований к дифференциальны м уравнениям.	8	8	2	4	2	
4	Раздел 4. Вариационное исчисление	8	24	6	10	8	Проверка контрольных работ
	Тема 4.1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.	8	8	2	4	2	
	Тема 4.2. Вариационные задачи с подвижными границами.	8	6	2	2	2	
	Тема 4.3. Условный экстремум в вариационном исчислении.	8	6	1	2	3	
	Тема 4.4. Применение вариационного	8	4	1	2	1	

	исчисления к физическим задачам.						
5	Раздел 5. Специальные функции	8	18	4	8	6	Проверка реферата
	Тема 5.1. Гамма-функция и бета-функция.	8	6	2	2	2	
	Тема 5.2. Бесселевы функции и их свойства.	8	6	1	3	2	
	Тема 5.3. Полиномы Лежандра и их применения.	8	6	1	3	2	
	Подготовка к зачету с оценкой	8	—	—	—	4	—
	Зачет с оценкой	8	—	—	—	—	—
ИТОГ О			108	28	38	42	

4.2. Содержание дисциплины (модуля)

Раздел 1. Теория функций действительного переменного

Тема 1.1. Мера Лебега и интеграл Лебега.

Построение меры Лебега на прямой. Измеримые множества. Измеримые функции. Интеграл Лебега для ограниченных и неограниченных функций. Свойства интеграла Лебега. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но не по Риману. Теорема Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Теорема Фату. Теорема Леви.

Тема 1.2. Метрические пространства и пространства функций.

Метрические пространства. Полнота. Пополнение. Пространства непрерывных функций $C[a, b]$. Пространства $L^p[a, b]$: норма, полнота, сепарабельность. Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы. Базисы.

Тема 1.3. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла.

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости. Теорема Фату. Теорема Беппо Леви. Применение к рядам и интегралам, зависящим от параметра. Дифференцирование интеграла по параметру.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

Тема 2.1. Производная Фреше и Гато.

Производная Фреше: определение, свойства, примеры. Матрица Якоби. Производная Гато. Связь между производными Фреше и Гато. Дифференцирование сложной функции.

Производные высших порядков.

Тема 2.2. Теоремы о неявных и обратных функциях.

Теорема о неявной функции в нормированных пространствах. Теорема об обратной функции. Следствия и приложения к системам уравнений.

Тема 2.3. Экстремумы функций многих переменных.

Необходимые условия экстремума (теорема Ферма). Достаточные условия экстремума. Вторая производная Фреше. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Выпуклые функции и их экстремумы.

Раздел 3. Интегральные преобразования

Тема 3.1. Преобразование Лапласа: определение и свойства.

Определение преобразования Лапласа. Область сходимости. Основные свойства: линейность, дифференцирование, интегрирование, сдвиг, масштабирование. Таблица преобразований Лапласа. Применение к решению дифференциальных уравнений и систем.

Тема 3.2. Преобразование Фурье и его обобщения.

Классическое преобразование Фурье. Свойства: линейность, дифференцирование, свертка, теорема Планшереля. Обобщенные функции и преобразование Фурье распределений. Дискретное преобразование Фурье.

Тема 3.3. Применение интегральных преобразований к дифференциальным уравнениям.

Решение задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа. Решение уравнений теплопроводности и волновых уравнений с помощью преобразования Фурье. Метод интегральных преобразований.

Раздел 4. Вариационное исчисление

Тема 4.1. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Постановка простейшей вариационной задачи. Функционал. Вариация функционала. Необходимое условие экстремума — уравнение Эйлера-Лагранжа. Примеры: брахистохрона, задача о минимуме площади поверхности вращения. Естественные граничные условия.

Тема 4.2. Вариационные задачи с подвижными границами.

Задачи с подвижными концами. Условия трансверсальности. Изопериметрические задачи.

Тема 4.3. Условный экстремум в вариационном исчислении.

Задачи со связями. Множители Лагранжа в вариационном исчислении. Задача о минимальной поверхности.

Тема 4.4. Применение вариационного исчисления к физическим задачам.

Принцип наименьшего действия в механике. Уравнения Лагранжа. Применение к задачам механики, физики и экономики.

Раздел 5. Специальные функции

Тема 5.1. Гамма-функция и бета-функция.

Определение гамма-функции $\Gamma(z)$ через интеграл Эйлера. Функциональное уравнение. Продолжение на комплексную плоскость. Бета-функция $B(x, y)$. Связь гамма- и бета-функции. Формула Стирлинга. Применения.

Тема 5.2. Бесселевы функции и их свойства.

Уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$. Ряд. Свойства: рекуррентные соотношения, ортогональность. Функции Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$.

Модифицированные функции Бесселя. Применение к задачам математической физики.

Тема 5.3. Полиномы Лежандра и их применения.

Уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра $P_n(x)$. Формула Родрига. Ортогональность. Производящая функция. Разложение функций по полиномам Лежандра. Применение к решению краевых задач.

5. Образовательные технологии

№ п/п	Образовательная технология	Описание применения	Темы (разделы)
1	Проблемное обучение	Решение нестандартных задач, исследование сложных объектов	Все разделы
2	Работа в малых группах	Групповое решение задач повышенной сложности	Разделы 2, 3, 4
3	Информационно-коммуникационные технологии	Использование математических пакетов (Maple, Mathematica) для вычислений и визуализации	Разделы 3, 5
4	Метод проектов	Разработка исследовательского проекта по применению методов анализа	Раздел 4
5	Исследовательский метод	Самостоятельное изучение и доказательство теорем	Раздел 1

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ нед.	Тема	Вид самостоятельной работы	Задание	Рекомендуемая литература	Количество часов
1	Тема 1.1. Мера и интеграл Лебега	Изучение материала	Изучить построение меры Лебега	[1], [2]	4
2	Тема 1.2. Метрические пространства	Изучение материала	Изучить пространства L^p	[1], [2]	2
3	Тема 1.3. Предельный переход	Изучение материала	Изучить теорему Лебега	[1], [2]	2

4	Тема 2.1. Производная Фреше	Решение задач	Вычислить производную Фреше	[1], [3]	2
5	Тема 2.2. Неявные функции	Решение задач	Применить теорему о неявной функции	[1], [3]	2
6	Тема 2.3. Экстремумы	Решение задач	Найти экстремумы функций многих переменных	[1], [3]	2
7	Тема 3.1. Преобразование Лапласа	Решение задач	Вычислить преобразования Лапласа	[1], [4]	2
8	Тема 3.2. Преобразование Фурье	Решение задач	Вычислить преобразования Фурье	[1], [4]	2
9	Тема 3.3. Применение	Решение задач	Решить дифференциальн ые уравнения	[1], [4]	2
10	Тема 4.1. Уравнение Эйлера	Решение задач	Составить уравнение Эйлера	[1], [5]	2
11	Тема 4.2. Подвижные границы	Решение задач	Решить задачи с подвижными границами	[1], [5]	2
12	Тема 4.3. Условный экстремум	Решение задач	Найти условные экстремумы	[1], [5]	3
13	Тема 4.4. Применение	Изучение материала	Изучить принцип наименьшего действия	[1], [5]	1
14	Тема 5.1. Гамма- функция	Решение задач	Вычислить значения гамма- функции	[1], [6]	2
15	Тема 5.2. Бесселевы функции	Решение задач	Использовать рекуррентные соотношения	[1], [6]	2
16	Тема 5.3. Полиномы Лежандра	Решение задач	Разложить функции по полиномам Лежандра	[1], [6]	2
17	Подготовка к	Повторение	Подготовка к	Все	4

	зачету		зачету	источники	
--	--------	--	--------	-----------	--

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Изучение теоретического материала. Рекомендуется систематически изучать теоретический материал по учебной литературе, обращая внимание на доказательства теорем и выводы формул.

Решение задач. Самостоятельное решение задач является основным видом внеаудиторной работы. Рекомендуется выполнять задачи из сборников, входящих в список литературы.

Компьютерное моделирование. При изучении специальных функций и интегральных преобразований рекомендуется использовать математические пакеты для вычислений и визуализации.

Подготовка реферата. Реферат выполняется по одной из предложенных тем (см. раздел 6.3). Требования к оформлению: объем 15–20 страниц, шрифт Times New Roman, 14 кегль, интервал 1,5.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Контроль освоения компетенций

№ п/п	Вид контроля	Контролируемые темы (разделы)	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Собеседование	Раздел 1	УК-1, ПК-1
2	Проверка контрольных работ	Разделы 2, 3, 4	УК-1, ПК-1, ПК-3
3	Проверка реферата	Раздел 5	ПК-1, ПК-3
4	Зачет с оценкой	Все разделы	УК-1, ПК-1, ПК-3

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)

7.1. Учебная литература

Основная литература:

1. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – Москва : Наука, 2024.
2. Натансон, И. П. Теория функций действительной переменной / И. П. Натансон. – Москва : Лань, 2024.
3. Рудин, У. Основы математического анализа / У. Рудин. – Москва : Мир, 2024.
4. Диткин, В. А. Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – Москва : Физматлит, 2024.
5. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – Москва : Наука, 2024.
6. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. – Москва : Физматлит, 2024.

Дополнительная литература:

7. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления (в 3 т.) / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 2024.
8. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – Москва : Наука, 2024.
9. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – Москва : Наука, 2024.

7.2. Интернет-ресурсы

1. Math-Net.Ru – общероссийский математический портал.
2. eLibrary.ru – научная электронная библиотека.
3. CyberLeninka – открытая научная библиотека.
4. Wolfram MathWorld – энциклопедия математических функций.

7.3. Программное обеспечение

№	Наименование ПО	Назначение
1	Windows / Linux	Базовое ПО
2	Microsoft Office / LibreOffice	Оформление документов
3	Математические пакеты (Maple, Mathematica, MATLAB)	Вычисления, визуализация, решение уравнений

7.4. Материально-техническое обеспечение

№	Оборудование	Количество	Назначение
1	Мультимедийная аудитория	1	Проведение лекций
2	Проектор / интерактивная доска	1	Демонстрация материалов
3	Компьютерный класс	1	Практические занятия с ПО
4	Доска для записей	1	Решение задач

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

№ раздела	Название раздела	Формируемые компетенции	Этап формирования
1	Теория функций действительного переменного	УК-1, ПК-1	Начальный
2	Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах	УК-1, ПК-1	Основной
3	Интегральные преобразования	УК-1, ПК-1	Основной
4	Вариационное исчисление	УК-1, ПК-1, ПК-3	Основной
5	Специальные функции	УК-1, ПК-1	Завершающий

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Таблица 2. Сопоставление шкал оценивания

Традиционная шкала	Балльно-рейтинговая шкала	Уровень сформированности компетенции
«отлично»	86–100	высокий
«хорошо»	71–85	средний
«удовлетворительно»	56–70	пороговый
«неудовлетворительно»	0–55	не сформирована

Таблица 3. Оценивание ответа на вопросы по темам для устного ответа

Критерий	Описание	Баллы (макс. 10)
Полнота и глубина ответа	Полное понимание вопроса, развернутый ответ	3
Логичность и аргументированность	Структурированность, обоснованность выводов	2
Умение применять знания	Иллюстрация теории примерами	3
Качество речи и владение материалом	Свободное владение материалом, корректная терминология	2

Таблица 4. Оценивание подготовки рефератов

Критерий	Баллы (макс. 10)
Соответствие теме и глубина раскрытия	3
Структура и логика	2
Использование источников	2
Оригинальность и самостоятельность	2

Оформление	1
------------	---

Таблица оценивания зачета

Критерий	Баллы (макс. 20)
Знание теоретического материала	5
Умение решать задачи повышенной сложности	5
Обоснование решения и строгость доказательств	4
Качество устного ответа	3
Дополнительные вопросы	3

Шкала перевода баллов за зачет: 17–20 = «отлично»; 13–16 = «хорошо»; 10–12 = «удовлетворительно»; 0–9 = «неудовлетворительно».

3. Материалы для проведения текущего контроля знаний и промежуточной аттестации

Вопросы для собеседования и коллоквиума:

1. Построение меры Лебега на прямой. Измеримые множества.
2. Интеграл Лебега: определение, свойства, сравнение с интегралом Римана.
3. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
4. Метрические пространства. Полнота. Пространства L^p .
5. Гильбертовы пространства. Ортонормированные системы.
6. Производная Фреше и Гато. Матрица Якоби.
7. Теорема о неявной функции в нормированных пространствах.
8. Теорема об обратной функции.
9. Экстремумы функций многих переменных. Достаточные условия.
10. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
11. Преобразование Лапласа: определение, свойства, таблица.
12. Применение преобразования Лапласа к дифференциальным уравнениям.
13. Преобразование Фурье: определение, свойства, теорема Планшереля.
14. Применение преобразования Фурье к уравнениям математической физики.
15. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
16. Вариационные задачи с подвижными границами. Условия трансверсальности.
17. Условный экстремум в вариационном исчислении.
18. Принцип наименьшего действия. Уравнения Лагранжа.
19. Гамма-функция: определение, функциональное уравнение, продолжение.
20. Бета-функция. Связь с гамма-функцией. Формула Стирлинга.
21. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого и второго рода.

22. Свойства функций Бесселя: рекуррентные соотношения, ортогональность.
23. Полиномы Лежандра: определение, формула Родрига, ортогональность.
24. Разложение функций по полиномам Лежандра.
25. Применение специальных функций к задачам математической физики.

Практические задания:

Задания по разделу 1 (Теория функций действительного переменного):

Задание 1. Мера Лебега.

1. Докажите, что множество рациональных чисел на отрезке $[0,1]$ имеет меру Лебега, равную нулю.
2. Найдите меру Лебега множества Кантора на отрезке $[0,1]$.
3. Постройте пример измеримой функции, не интегрируемой по Риману, но интегрируемой по Лебегу.
4. Вычислите интеграл Лебега от функции Дирихле на $[0,1]$.
5. Докажите, что если f измерима и $f = g$ почти всюду, то интегралы Лебега от f и g совпадают.

Задание 2. Интеграл Лебега.

Вычислить интегралы Лебега:

1. $\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu$
2. $\int_{[0,1]} \ln x d\mu$
3. $\int_{[0,\infty)} e^{-x} d\mu$
4. $\int_{[0,1]} \frac{1}{x^p} d\mu$ при различных p
5. $\int_{[0,1]} x^2 d\mu$ (проверить совпадение с интегралом Римана)

Задание 3. Теоремы о предельном переходе.

1. Примените теорему Лебега о мажорируемой сходимости к последовательности $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ на $[0,1]$.
2. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x}{n} e^{-x/n} dx$.
3. Используя теорему Лебега, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2} dx = 0$.
4. Вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{\sin(nx)}{n} dx$.

Задания по разделу 2 (Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах):

Задание 4. Производная Фреше.

1. Найдите производную Фреше функции $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ в точке $(1,2)$.
2. Найдите матрицу Якоби для отображения $F(x,y,z) = (x^2, y^2, xyz)$.
3. Вычислите производную Фреше для функции $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$.

4. Докажите, что если f дифференцируема по Фреше, то она непрерывна.

Задание 5. Теорема о неявной функции.

1. Убедитесь, что уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт неявную функцию $y = y(x)$ в окрестности точки $(0,1)$. Найдите $y'(0)$.
2. Для системы $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ определите, можно ли выразить x, y как функции z в окрестности точки $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})$.
3. Примените теорему о неявной функции для доказательства существования решения уравнения $F(x, y) = x^3 - y^3 + 3xy = 0$ в окрестности точки $(0,0)$.

Задание 6. Экстремумы функций многих переменных.

Найти экстремумы:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$
2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
3. $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$
4. $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 4y + 1$
5. Найти условный экстремум $f(x, y) = xy$ при условии $x + y = 1$.
6. Найти условный экстремум $f(x, y, z) = xyz$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Задания по разделу 3 (Интегральные преобразования):

Задание 7. Преобразование Лапласа.

Найти преобразование Лапласа:

1. $f(t) = 1$
2. $f(t) = t$
3. $f(t) = e^{at}$
4. $f(t) = \sin \omega t$
5. $f(t) = \cos \omega t$
6. $f(t) = t^n$
7. $f(t) = \sinh at$
8. $f(t) = \cosh at$
9. $f(t) = e^{at} \sin \omega t$
10. $f(t) = te^{at}$

Задание 8. Применение преобразования Лапласа.

Решить дифференциальные уравнения с помощью преобразования Лапласа:

1. $y' + 2y = e^{-t}, y(0) = 0$
2. $y'' + y = \sin t, y(0) = 0, y'(0) = 1$
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, y(0) = 0, y'(0) = 0$
4. $y'' + 4y = \cos 2t, y(0) = 1, y'(0) = 0$

$$5. \quad y'' + 2y' + y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Задание 9. Преобразование Фурье.

Найти преобразование Фурье:

$$1. \quad f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

$$2. \quad f(t) = e^{-a|t|}$$

$$3. \quad f(t) = e^{-t^2/2}$$

$$4. \quad f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$$

$$5. \quad f(t) = \cos \omega_0 t$$

$$6. \quad f(t) = \delta(t)$$

Задание 10. Применение преобразования Фурье.

Решить дифференциальные уравнения с помощью преобразования Фурье:

$$1. \quad y'' - y = f(x), \text{ где } f(x) = e^{-|x|}$$

$$2. \quad \text{Уравнение теплопроводности } u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = \phi(x) \text{ на всей прямой.}$$

$$3. \quad \text{Волновое уравнение } u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \text{ на всей прямой.}$$

Задания по разделу 4 (Вариационное исчисление):

Задание 11. Уравнение Эйлера.

Составить уравнение Эйлера для функционалов:

$$1. \quad J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$$

$$2. \quad J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2y) dx$$

$$3. \quad J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2 + 2xy) dx$$

$$4. \quad J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx \text{ (длина кривой)}$$

$$5. \quad J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2) dx$$

Задание 12. Вариационные задачи.

$$1. \quad \text{Найти экстремаль функционала } J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y) dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$2. \quad \text{Найти экстремаль функционала } J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2y) dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

$$3. \quad \text{Найти экстремаль функционала } J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2) dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1.$$

$$4. \quad \text{Найти экстремаль функционала } J[y] = \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx, \quad y(0) = 0, y(1) = 1 \text{ (длина кривой — кратчайший путь).}$$

$$5. \quad \text{Задача о брахистохроне: найти кривую, по которой материальная точка скатывается за кратчайшее время.}$$

Задание 13. Условный экстремум.

$$1. \quad \text{Найти экстремум функционала } J[y] = \int_0^1 y'^2 dx \text{ при условии } \int_0^1 y^2 dx = 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

2. Найти экстремум функционала $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + y^2) dx$ при условии $\int_0^1 y dx = 1$.

Задания по разделу 5 (Специальные функции):

Задание 14. Гамма-функция.

1. Вычислите $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(1/2)$.
2. Используя функциональное уравнение, выразите $\Gamma(n+1)$ через $\Gamma(1)$.
3. Используя формулу Стирлинга, оцените $100!$.
4. Выразите интеграл $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ через гамма-функцию.

Задание 15. Бесселевы функции.

1. Напишите ряд для функции Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$.
2. Используя рекуррентное соотношение $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$, выразите $J_2(x)$ через $J_0(x)$ и $J_1(x)$.
3. Докажите ортогональность функций Бесселя на отрезке $[0,1]$ с весом x .
4. Разложите функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[0,1]$ по функциям Бесселя $J_0(\alpha_n x)$.

Задание 16. Полиномы Лежандра.

1. Найдите полиномы Лежандра $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ по формуле Родрига.
2. Докажите ортогональность полиномов Лежандра на отрезке $[-1,1]$.
3. Разложите функцию $f(x) = x^3$ по полиномам Лежандра.
4. Разложите функцию $f(x) = |x|$ по полиномам Лежандра на отрезке $[-1,1]$.

Зачет с оценкой

Пример билета:

Билет № 1

1. Мера Лебега и интеграл Лебега. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.
2. Преобразование Лапласа: определение, основные свойства, применение к решению дифференциальных уравнений.
3. Уравнение Бесселя и функции Бесселя. Основные свойства и применения.

Практическое задание 1: Вычислить интеграл Лебега $\int_{[0,1]} \frac{1}{\sqrt{x}} d\mu$.

Практическое задание 2: Найти преобразование Лапласа функции $f(t) = e^{at} \sin \omega t$.

Практическое задание 3: Найти экстремаль функционала $J[y] = \int_0^1 (y'^2 + 2xy) dx$, $y(0) = 0, y(1) = 1$.

Лист изменений рабочей программы

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой
----------------	--	------------------------	--------------------------

Рабочая программа дисциплины **ФТД 01 Избранные вопросы математического анализа**

составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования бакалавриат), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика" (с изменениями и дополнениями) (Редакция с изменениями N 1456 от 26.11.2020, С изменениями и дополнениями от: 26 ноября 2020 г., 8 февраля 2021 г.), с учетом профессионального стандарта 01Образование и наука, утвержденного приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от «5» августа 2021 г. № 30550

Протокол № 8 от «27» апреля 2026г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета Протокол № 6 от «28» апреля 2026 г